159 - Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications

Cadre : Tous les corps sont commutatifs. K est un corps, E est un K-ev de dimension finie $n \geq 1$. $\mathcal{B} = (e_1 \dots e_n)$ est une base de E. ♡

I. Forme linéaire et espace dual

1) Définitions, premières propriétés

[Gou] **Déf.(1)** : Une forme linéaire sur E est une application linéaire
126 de E dans K. On note $E^* = \mathcal{L}(E,K)$ l'ensemble des formes linéaires sur E. C'est un K-ev, appelé dual de E.

Rq(2) : Si $(E, \|\cdot\|)$ est un evn, alors toutes les formes linéaires sur E sont continues. Ce n'est pas toujours le cas si $\dim E = +\infty$.

Ex(3) : 1) $E = \mathcal{M}_n(K)$. Si $A \in E$, $M \mapsto \mathrm{Tr}(AM)$ et $M \mapsto \mathrm{Tr}(MA)$
♡ ++ sont des formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(K)$.
++ 2) Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : U \to \mathbb{R}$ une application différentiable sur U. Alors, pour tout $x \in U$, $df(x) \in (\mathbb{R}^n)^*$

Déf.(6) : $\mathcal{B} = (e_1 \dots e_n)$ étant une base de, pour $1 \leq i \leq n$, la forme
127 linéaire définie par $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$ $1 \leq j \leq n$ est appelée forme linéaire coordonnée d'indice i.

Th.(7) : Si $\mathcal{B} = (e_1 \dots e_n)$ est une base de E, alors $\mathcal{B}^* = (e_1^* \dots e_n^*)$ est une base de E^* appelée base duale de $\mathcal{B}$. On a alors :

$$\forall \varphi \in E^*, \ \varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i) e_i^*$$

Coro(8) : $\dim E = \dim E^*$

Rq(9) : Si E est de dimension infinie et $(e_i)_{i \in I}$ est une base de E, alors $(e_i^*)_{i \in I}$ est une famille libre de E^* mais pas nécessairement une base (algébrique !).

Ex(10) : $E = K[X]$, $(X^n)_{n \in \mathbb{N}} = (e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de E. Soit $\varphi : K[X] \to K$, $e_n = X^n \mapsto 1$. Alors $\varphi \notin \mathrm{Vect}(e_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$, car on aurait " $\varphi = \sum_{n=0}^{+\infty} e_n^*$ ".

2) Traduction matricielle

Prop.(11) : Soit $\varphi \in E^*$, $x \in E$ et $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, x$. Alors,
${}^t\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, \varphi \in K^n$ et $\varphi(x) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, \varphi \cdot X$ 130

Prop.(12) : Soient $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ deux bases de E et $P = \mathrm{Pass}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$. Alors, $\mathrm{Pass}(\mathcal{B}_1^*, \mathcal{B}_2^*) = {}^tP^{-1}$

3) Bidual. Base antiduale

Déf(13) : Le bidual de E est l'espace dual de E^*, noté E^{**} 126

Ex.(14) : Soit $x \in E$ et $ev_x : E^* \to K$, $\varphi \mapsto \varphi(x)$. Alors $ev_x \in E^{**}$ 127

Th.(15) : $E \to E^{**}$, $x \mapsto ev_x$ est un isomorphisme canonique.

Prop.(16) : Soit $(f_1^* \dots f_n^*)$ une base de E^*. Il existe une unique base $(f_1 \dots f_n)$ de E telle que : $\forall 1 \leq i \leq n$, $f_i = u_i^*$. Cette base s'appelle base antiduale de $(f_1 \dots f_n)$.

Rq(17) : La prop.(12) nous donne une méthode pour trouver la base antiduale si on connaît une base $(e_1 \dots e_n)$ de E et l'expression des f_i^* dans $(e_1^* \dots e_n^*)$

Exo(18) : $E = \mathbb{R}^3$, (e_1, e_2, e_3) une base de E. Soient $f_1^*, f_2^*, f_3^* \in E^*$ 131
telles que $f_1^* = 2e_1^* + e_2^* + e_3^*$; $f_2^* = -e_1^* + 2e_3^*$; $f_3^* = e_1^* + 3e_2^*$.
Mq (f_1^*, f_2^*, f_3^*) est une base de E^* et déterminer sa base antiduale.

II. Orthogonalité. Applications transposées

1) Orthogonalité

Déf. (19) : Deux éléments $x \in E$ et $\varphi \in E^*$ sont dits orthogonaux si $\varphi(x)=0$. Si $A \subset E$ et $B \subset E^*$, on note :

128 1) $A^\perp = \{\varphi \in E^* / \forall x \in A, \varphi(x)=0\}$. C'est un sev de E^*

2) $B^\circ = \{x \in E / \forall \varphi \in B, \varphi(x)=0\}$. C'est un sev de E.

Rq (20) : $\{\varphi\}^\circ = \mathrm{Ker}\,\varphi$, $B^\circ = \bigcap_{\varphi \in B} \mathrm{Ker}\,\varphi$

Prop. (21) : 1) $A_1 \subset A_2 \subset E \Rightarrow A_1^\perp \supset A_2^\perp$ 2) $A^\perp = (\mathrm{Vect}\,A)^\perp$

3) $B_1 \subset B_2 \subset E^* \Rightarrow B_1^\circ \supset B_2^\circ$ 3) $B^\circ = (\mathrm{Vect}\,B)^\circ$

Th. (22) : 1) Soit F un sev de E. Alors : $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$ et $F^{\perp\circ} = F$

2) Soit G un sev de E^*. Alors : $\dim G + \dim G^\circ = \dim E$ et $G^{\circ\perp} = G$.

Coro (23) : Soit F un sev de E. Alors : $F = E \Leftrightarrow F^\perp = \{0\}$.

Rq (24) : $F^{\perp\circ} = F$ reste vrai en dimension infinie, mais pas $G^{\circ\perp} = G$.

C-Ex (25) : $E = \mathbb{R}[X]$. $n \in \mathbb{N}$: $\varphi_n(P) = P^{(n)}(0)$ et $G = \mathrm{Vect}(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Alors $G^{\circ\perp} = \{0\}^\perp = E^*$, mais $G \neq E^*$

2) Hyperplans

Th. (26) : 1) Soient $\varphi_1 \dots \varphi_p \in E^*$ telles que $\mathrm{rg}(\varphi_1 \dots \varphi_p) = r$, et

128 $F = \bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}\,\varphi_i$. Alors $\dim F = n - r$.

129 2) Soit F un sev de E de dimension p. Alors il existe $\varphi_1 \dots \varphi_{n-p} \in E^*$ linéairement indépendantes telles que $F = \bigcap_{i=1}^{n-p} \mathrm{Ker}\,\varphi_i$

Prop. (27) : Soient A_1, A_2 (resp B_1, B_2) deux sev de E (resp E^*). Alors

129 1) $(A_1 + A_2)^\perp = A_1^\perp \cap A_2^\perp$ 2) $(A_1 \cap A_2)^\perp = A_1^\perp + A_2^\perp$

2) $(B_1 + B_2)^\circ = B_1^\circ \cap B_2^\circ$ 3) $(B_1 \cap B_2)^\circ = B_1^\circ + B_2^\circ$

Déf. (28) : Un hyperplan de E est un sev de E de codimension 1.

Prop. (29) : Soit $\varphi \in E^*$ non identiquement nulle. Alors, Ker φ est un hyperplan. Réciproquement, tout hyperplan de E est le noyau d'une forme linéaire sur E non nulle.

Prop. (30) : Soit H un hyperplan. Alors $H^\perp$ est une droite de E^*.

3) Application transposée

Déf. (31) : Soient E, F deux K-ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E,F)$. 129
L'application transposée de u est ${}^t u : F^* \to E^*$, $f \mapsto f \circ u$

Prop. (32) : Soient B_E (resp. B_F) une base de E (resp F) 130
de base duale B_E^* (resp. B_F^*). Alors,

$$\mathrm{Mat}({}^t u, B_F^*, B_E^*) = {}^t\mathrm{Mat}(u, B_E, B_F)$$

Prop. (33) : Avec les notations de Déf. (31) 129

1) $\mathrm{rg}\,{}^t u = \mathrm{rg}(u)$ 2) $\mathrm{Ker}({}^t u) = (\mathrm{Im}\,u)^\perp$ 3) $\mathrm{Im}({}^t u) = (\mathrm{Ker}\,u)^\perp$

Prop. (34) : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sev de E. Alors F est stable par 130
u SSI $F^\perp$ est stable par ${}^t u$.

III. Applications

1) Algèbre linéaire et bilinéaire

Th. (35) : (Riesz-Fréchet)

On suppose $(E, \langle , \rangle)$ euclidien. Alors $\varphi : E \to E^*$, $y \mapsto \varphi_y = \langle \cdot, y \rangle$ est un isomorphisme isométrique

Rq (36) : Le théorème reste vrai si E est un espace de Hilbert.

Appli (37) : Si E est euclidien, alors pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique $f^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall x, y \in E$, $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$
f^* est appelé adjoint de f.

~~**Appli. 38:** Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}$ une application différentiable. Alors : $\forall x \in U, \exists \nabla_x f \in \mathbb{R}^n / \forall h \in \mathbb{R}^n, df(x)(h) = \langle \nabla_x f, h \rangle$.~~

[NH2G2] **Lemme 39:** Soient p, q premiers impairs et $d = \frac{p-1}{2}$. Soient
$(y_1 \dots y_d) \in \mathbb{F}_q^d$ non tous nuls, $\alpha \in \mathbb{F}_q$. On pose
303 $F = \{ (z_1 \dots z_d) \in \mathbb{F}_q^2 / \sum_{i=1}^{d} y_i z_i + \alpha = 0 \}$. (*)

Alors, $|F| = q^d - 1$

Appli. 40: *(loi de réciprocité quadratique)*

Soient p, q premiers impairs. Alors $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \times \frac{q-1}{2}}$

3) Théorème des extrema liés.

Rq. 41: On supposera connues les notions de sous-variété et d'espace tangent à une sous-variété en un point.

[Rou] **Th. 42:** *(extrema liés)*
Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f, g_1 \dots g_p : U \to \mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
372 Soit $X = \{ x \in U / \forall 1 \leq i \leq p, g_i(x) = 0 \}$. Si $f_{|X}$ admet un extremum local en $x_0 \in X$ et $dg_1(x_0) \dots dg_p(x_0)$ sont linéairement indépendantes,
DVP1 alors il existe $\lambda_1 \dots \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que $df(x_0) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i dg_i(x_0)$

Appli. 43: *(théorème spectral)*
409 411 Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ un endomorphisme autoadjoint. Alors il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ de vecteurs propres de u.

[Av] 103 **Appli. 44:** *(inégalité de Hadamard)*
Soit $f : \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(v_1 \dots v_n) \mapsto \det(v_1 \dots v_n)$ et $X = \{ (v_1 \dots v_n) \in (\mathbb{R}^n)^n / \|v_1\|_2 = \dots = \|v_n\|_2 = 1 \}$

1) Mq le maximum de $f_{|X}$ est > 0 et atteint en $(v_1 \dots v_n)$ formant une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$

2) En déduire que : $\forall v_1 \dots v_n \in \mathbb{R}^n, |\det(v_1 \dots v_n)| \leq \|v_1\|_2 \dots \|v_n\|_2$

2) Théorème de Hahn-Banach

Th. 45: *(Hahn-Banach géométrique)* [BMP] 97
Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace de Hilbert, A un convexe compact et B un convexe fermé. Alors : $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \exists f \in E^* / \inf_{a \in A} f(a) > \sup_{b \in B} f(b)$ DVP2

Appli. 46: On note $co(O(n))$ l'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ [20] dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et B la boule unité fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour la 205 norme subordonnée à la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$ dans $\mathbb{R}^n$. 206

Alors, $co(O(n)) = B$.

Rq 47: On admettra les théorèmes de Carathéodory et de décomposition polaire.

4) Gradient

Cadre 48: Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}$ une application différentiable

Prop./Déf 49: $\forall x \in U, \exists! \nabla_x f \in \mathbb{R}^n / \forall h \in \mathbb{R}^n, df(x)(h) = \langle \nabla_x f, h \rangle$
$\nabla_x f$ est appelé gradient de f en x.

Prop. 50: Si $\nabla_x f \neq 0$, Alors :
1) $\nabla_x f$ donne la direction de plus grande croissance de f
2) $\nabla_x f$ est orthogonal à la ligne de niveau passant par x.

Appli. 51: $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle x, b \rangle$.
Alors l'algorithme du gradient optimal nous permet de déterminer une valeur approchée de l'unique solution de $Ax = b$ en nous déplaçant orthogonalement aux lignes de niveaux *(faire un dessin)*

(*) intéressant à mettre : Frobenius, existence de base q-orthogonale

<u>Références :</u>

- [Gou] Gourdon, Algèbre (2e éd.)
- [NH2G2] Caldero, Nouvelles... Tome 2
- [BMP] Beck..., Objectif agrégation (2e éd.)
- [ZQ] Zuily Queffélec, Analyse pour l'agrégation